
الوحدة الثالثة
التكامل المحدود

محتويات الوحدة

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس

ندخل بك إلى الوحدة الثالثة، وهى ذات أهمية في علم الحسبان، وتوضح لك طرق استخدام التكامل في إيجاد المساحة التي يحصرها منحنى مع المحور السيني، أو الصادي، أو مع مستقيم أو منحنيين، ومنها تتعرف على أهمية علم الحسبان وفوائده، التي تساعد وتختصر كثير من المسائل المعقدة وتحاول تبسيطها.

قسمت الوحدة إلى قسمين: بدأ **القسم الأول** بتعريف عن التكامل المحدود، وأصله ثم تحديد خصائصه، في **القسم الثاني** نشرح تطبيقات التكامل المحدود، في إيجاد المساحة التي تنحصر بين منحنيين، أو منحنى و مستقيم أو محور.

تجد داخل الوحدة الأمثلة التي وضعت لها حلول، ثم أسئلة التقويم الذاتي، والتي تساعدك على تركيز القوانين والتأكد من الاستيعاب، وسوف تجد لها إجابات في نهاية الوحدة، كذلك التدريبات التي تفيدك في تطبيق القوانين، والتدريب على حلول كثير من المسائل التي تواجهك، عليك أن تكثر من التمارين، وترجع إلى المراجع حتى تستفيد، نأمل أن تكون وحدة مفيدة، عليك بتقديم اقتراحاتك ونقدك البناء نتمنى لك الفائدة.

أهداف الوحدة

عزيزي الدارس بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة يجب أن تكون قادرا على أن:

- **تعرف** التكامل المحدود.
- **تشرح** خصائص التكامل المحدود.
- **تستخدم** التكامل المحدود في إيجاد المساحة التي تنحصر بين منحنيين، أو منحنى ومستقيم أو محور.
- **تطبق** قوانين التكامل المحدود في الفيزياء، وفى العلوم الأخرى.

1. أصل التكامل المحدود

لقد شرحنا لك في الوحدة الأولى كيفية إيجاد المساحة التي يحصرها منحني $f(x)$ في الفترة $[a,b]$ عن طريقة جمع ريمان، حيث وجدت أن المساحة التي يحصرها المنحني $f(x)$ في الفترة $[a,b]$ مع المحور السيني هي $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$. والآن يمكنك أن تحصل علي هذه المساحة مباشرة باستخدام التكامل المحدود. فإذا كانت $F(x) = \int f(x)\,dx$ فإن التكامل المحدود يُعرّف على النحو التالي

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$$

أو

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

أو

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\,dx\Big|_a^b$$

وتمثل قيمة هذا التكامل، من الناحية الهندسية، المساحة التي يحصرها المنحني بين النقطتين $x=a$ و $x=b$. ولمجموع تكاملين $F(x)+G(x)$ نجد أن

$$(F(x)+G(x))|_a^b = F(x)|_a^b + G(x)|_a^b$$

وللتكامل المحدود الخصائص التالية:

1. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$

2. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

3. إذا كانت $f(x)$ دالة فردية فإن $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

4. إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية فإن $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^{2a} f(x)\,dx$

وهنا نذكرك بالدالة الفردية وهي الدالة التي فيها f(-x) =-f(x) والدالة الزوجية وهي الدالة التي تكون فيها f(-x)=f(x) والتى شرحناها لك في الحسبان (1)

وتجد أن تطبيقات التكامل المحدود كثيرة جداً، ويكاد لا يخلو علم من العلوم من استخداماته. ففي الفيزياء تجد أن الشغل المبذول (W) لتحريك جسم من النقطة a إلى النقطة b تحت تأثير قوة F، يُعطي بالمعادلة $W = \int_a^b F\, dx$.

مثال:

أوجد التكامل المحدود التالي $\int_1^3 (x+2x^2)\, dx$ بالقانون مباشرة. تجد أن $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2\frac{x3}{3}$ ومنها تجد أن $F(3) = \frac{3^2}{2} + 2\frac{3^3}{3} = \frac{9}{2} + 18 = \frac{45}{2}$ و $F(3) = \frac{1^2}{2} + 2\frac{1^3}{3} = \frac{7}{6}$ وتصبح بالتالي قيمة التكامل $\int_1^3 (x+2x^2)\, dx = F(3) - F(1) = \frac{45}{2} - \frac{7}{6} = \frac{135-7}{6} = \frac{128}{6} = \frac{64}{3}$. ناقصاً قيمة ناتج التكامل بالقيمة السفلي.

مثال:

أوجد التكامل المحدود التالي $\int_2^{-1} (3x^2 + 4x^3)\, dx$ بالقانون مباشرة.

تكتب هذا التكامل على الصورة

$$\int_2^{-1} (3x^2 + 4x^3)\, dx = \left(3\frac{x^2}{3} + 4\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_2^{-1} = \left((-1)^2 + (-1)^4\right) - \left((2)^2 + (2)^4\right) = -18$$

تدريب(1)

(1) أوجد الشغل اللازم بذله لتحريك جسم من النقطة $x = 0$ إلى النقطة $x = 3$ تحت تأثير القوة $F = \sin(\pi x) + \cos(\frac{\pi}{3} x)$.

(2) أوجد التكامل $\int_0^{\pi} \sin(x)\, dx$

مثال:

أوجد التكامل المحدود التالي $\int_1^2 (3-4x)^3\, dx$ بالقانون مباشرة.

بوضع $y=3-4x$ ومنها $dy=-4dx$ أو $dx=-\frac{dy}{4}$، تكتب هذا التكامل على الصورة التالية

$$\int y^3 \frac{dy}{-4} = -\frac{1}{4}\int y^3\, dy = -\frac{1}{4}\left(\frac{y^4}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{(3-4x)^4}{-4}\right)$$

وبالتالي يصبح التكامل علي الصورة

$$\int_1^2 (3-4x)^3\, dx = \left.\frac{(3-4x)^4}{4\times(-4)}\right|_1^2 = \frac{(3-4(2))^4}{-4\times 4} - \frac{(3-4(1))^4}{-4\times 4} = \frac{(-5)^4}{-16} - \frac{(-1)^4}{-16} = -\frac{624}{16}$$

مثال:

أوجد الشغل اللازم بذلة لتحريك جسم تحت تأثير القوة $F=2x+3x^2$ من النقطة $x=2$ إلى النقطة $x=4$.

أولاً يُعطي الشغل W بالمعادلة $W=\int_a^b F\, dx$ وبالتالي يكون

$$W=\int_2^4 (2x+3x^2)\, dx = \left(x^2+x^3\right)\Big|_2^4 = \left(4^2+4^3\right)-\left(2^2+2^3\right)=68$$

مثال:

أوجد التكامل المحدود التالي

$$!\int_0^2 (x+x^2)\, dx$$

يُعطي هذا التكامل بـ

$$\begin{aligned}\int_0^2 (x+x^2)\, dx &= \left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 \\ &= \left(\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}\right)-\left(\frac{0^2}{2}+\frac{0^3}{3}\right) \\ &= 2+\frac{8}{3} \\ &= \frac{14}{3}\end{aligned}$$

تدريب(2)

(1) أوجد المسافة التي يقطعها جسم بين اللحظتين $t = 1\sec$ و $t = 3\sec$، إذا كانت سرعته $({}^{m}\!/\!_{\sec})$ $v = 2 + 4t + 3t^2$، علماً بان $v = \dfrac{dx}{dt}$، أو $\int v\, dt$.

(2)استخدم جمع ريمان لإيجاد التكامل المحدود للمنحني $f(x) = x^2$ في الفترة [2,3] ثم قارن ذلك بالتكامل مباشرة للمنحني، أي $\int_a^b f(x)\, dx$.

(3) أوجد التكامل $\int_0^1 (x^2 - x)\, dx$

أسئلة تقويم ذاتي(1)

(1) أوجد التكاملات التالية بالقانون مباشرة

(1) $\int_0^2 (2x+3)^3 dx$ (2) $\int_2^3 \sqrt{4x+5}\, dx$ (3) $\int_1^4 \dfrac{(2x+9)}{(x^2+9x+2)}\, dx$

(4) $\int_0^\infty e^{3x}\, dx$ (5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{(x^2+4)}\, dx$

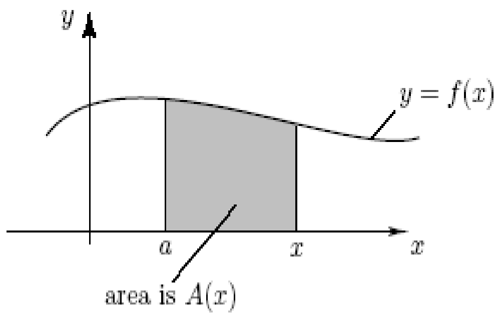
2. المساحة المحصورة بين منحنيين

تذكر عندما تكلمنا عن تطبيقات التكامل قلنا أن أهم تطبيقات التكامل المحدود هو إيجاد المساحة التي تنحصر بين منحنيين، أو منحني ومستقيم، أو محور. ونحصل علي هذه المساحات بناءاً علي الشكل الهندسي للمنحني و الخط المستقيم، و ذلك علي النحو التالي:

- إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتان مستمرتان في الفترة $a \le x \le b$ فإن المساحة المحصورة (A) بينهما تُعطي بالتكامل المحدود على النحو التالي

$$A = \int_a^b [\, f(x) - g(x)]\, dx$$

من هذا الرسم تستطيع أن توضح المساحة المحصورة بين المنحني $y = f(x)$ والمحور السيني بين $x = a$ و $x = b$.



وتُعطي للمساحة المحصورة بين المنحنى $f(x)$ والمحور السيني

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

(لأن معادلة المحور السيني $g(x) = y = 0$)

نذكرك ببعض النقاط التى لها أهمية في هذا الجزء منها :

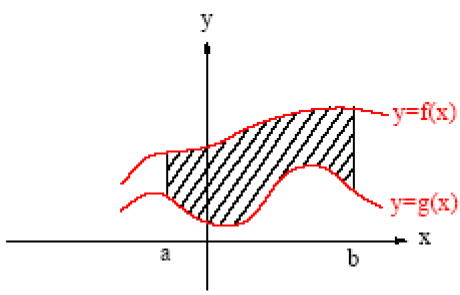
1. إذا كانت $f(x)$ دالة غير سالبة فإن المقدار

$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

يمثل المساحة المحصورة فوق الحور السيني مع المنحني $f(x)$.

2. إذا كانت $f(y)$ و $g(y)$ دالتان مستمرتان في الفترة $c \le y \le d$ فإن المساحة المحصورة (A) بينهما تُعطى بالتكامل المحدود على النحو التالي

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy$$

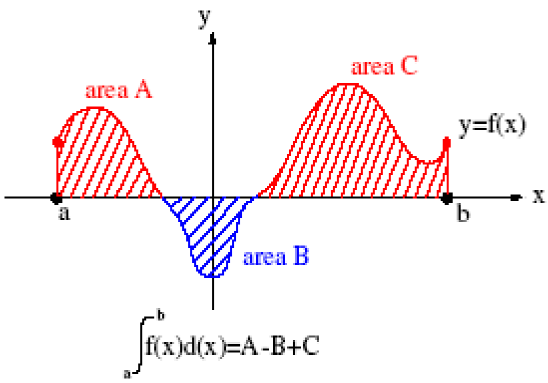


3. وتُعطي للمساحة المحصورة بين المنحنى والمحور الصادي

$$f(y)\ \ A = \int_c^d f(y)\,dy$$

(لأن معادلة المحور الصادي $g(y) = x = 0$)

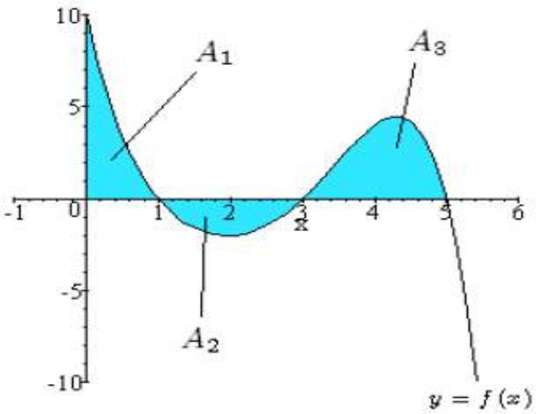
يمكنك أن تلاحظ أن المساحة تحت المنحني أدناه تأخذ الشكل



حيث

$$\int_a^b f(x)\,dx = A - B + C$$

4. ولإيجاد المساحة المحصورة بين منحني ومحور لابد من معرفة النقاط التي يقطع عندها المنحني المحور. فإذا كانت هنالك مساحة واقعة اسفل المنحني و أخرى اعلي المنحني، كما في الرسم أدناه



تكون المساحة الكلية (المظللة) علي النحو التالي

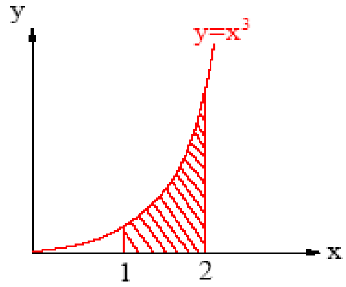
$$\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_1^3 f(x)\,dx + \int_3^5 f(x)\,dx$$

أنظر إلى الرسم لتتعرف على مساحة الأشكال المظللة والتى تمثل المساحة الكلية

$$\int_0^5 f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3$$

مثال:

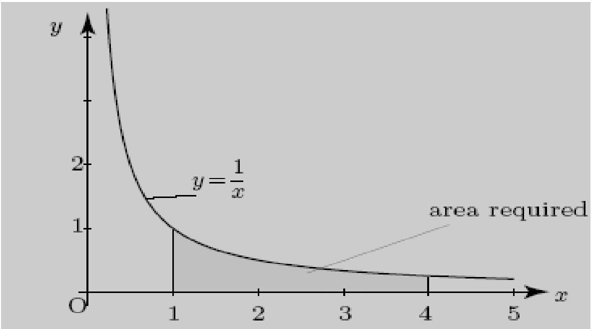
أوجد المساحة المحصورة بين المنحني $y = x^3$ والمحور السيني بين $x = 1$ و $x = 2$



$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \int_1^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{1}{4}(x^4)\Big|_1^2 = \frac{1}{4}(2^4 - 1^4) = \frac{15}{4}$$

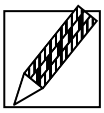
مثال:

أوجد المساحة المحصورة بين المنحني $y = \frac{1}{x}$ والمحور السيني بين $x = 1$ و $x = 4$



$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \int_1^4 \frac{1}{x} dx = \ln x\,\Big|_1^4 = \ln 4 - \ln 1 = \ln 4 = 1.386$$

تدريب(3)



(1) أوجد المساحة المحصورة بين المنحني $y = x(x-1)(x-2)$ والمحور السيني.

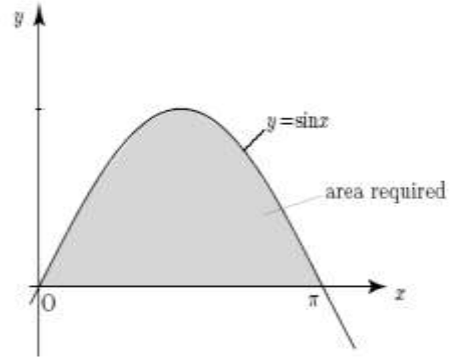
(2) أوجد التكامل التالي : $\int_1^5 (3x+5)\,dx$

مثال:

أوجد المساحة المحصورة بين المنحني $y = \sin x$ والمحور السيني بين $x = 0$ و $x = \pi$.

تعطي المساحة (المنطقة المظللة) بـ

$$A = \int_a^b \sin x \, dx = \int_0^\pi \sin x \, dx = -\cos x \,|_0^\pi = -(\cos \pi - \cos 0) = 2$$



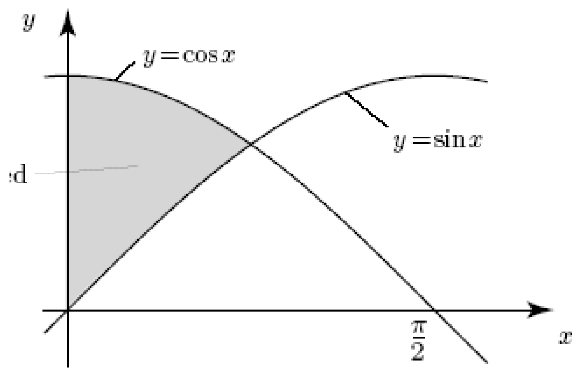
مثال:

أوجد المساحة المحصورة بين المنحني $y = \sin x$ المنحني $y = \cos x$ بين $x = 0$ و $x = \frac{\pi}{4}$

أولاً تجد أن المنحنيين يتقاطعان عند $x = \frac{\pi}{4}$. تُعطي المساحة (المنطقة المظللة) بـ

$$A = \int_a^b [\,f(x) - g(x)]\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\cos x - \sin x]\, dx = \sin x|_0^{\frac{\pi}{4}} + \cos x\,|_0^{\frac{\pi}{4}} = (\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}) - (\sin 0 + \cos 0) = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1$$

$A = 0.414$



تدريب(4)

(1) أوجد المساحة المحصورة بين المنحني $y = 2 - x^2$ والمحور السيني بين $x = 0$ و $x = 2$.

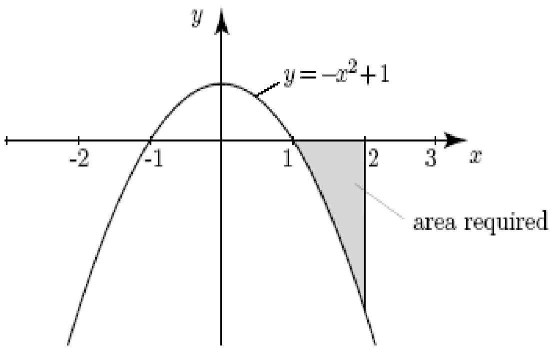
(2) أوجد التكامل التالي: $\int_0^3 \frac{5e^{2x}}{7 + 9e^2 x} dx$

مثال:

أوجد المساحة المحصورة بين المنحني $y = -x^2 + 1$ المنحني والمحور السيني، بين $x = 1$ و $x = 2$.

تُعطي معادلة المحور السيني بـ $y = 0$.

أولاً تجد أن المنحنيين يتقاطعان عند $x = 1, -1$ وعليه تكون المساحة المحصورة (كما موضحة بالرسم) هي



$$A = \int_1^2 (-x^2 + 1)\, dx = (-\frac{x^3}{3} + x)\big|_1^2 = (-\frac{2^3}{3} + 2) - (-\frac{1^3}{3} + 1) = -\frac{4}{3}$$

وتعنى الإشارة السالبة أن المساحة تقع أسفل المحور السيني.

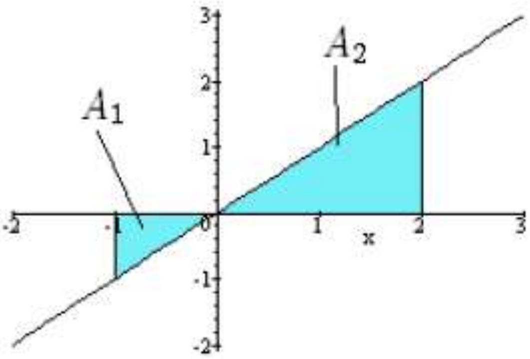
مثال:

أوجد المساحة المحصورة بين المستقيم $y = x$ والمحور السيني بين $x = -1$ و $x = 2$.

تلاحظ أن المستقيم يقطع المحور السيني عند النقطة $x = 0$ وبالتالي لابد من كتابة المساحة المحصورة علي النحو التالي

$$\int_{-1}^{2} x\,dx = \int_{-1}^{0} x\,dx - \int_{0}^{2} x\,dx = -A_1 + A_2$$

حيث A_1 و A_2 هما المساحتان المظللتان في الرسم أدناه



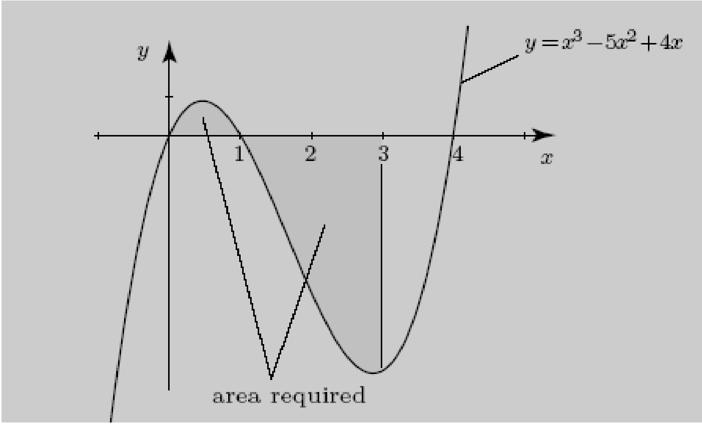
تدريب(5)

(1) أوجد المساحة المحصورة بين المنحني $y = e^x$ والمحور الصادي و المستقيم $x = 2$.

مثال:

أوجد المساحة المحصورة بين المنحني $y = x^3 - 5x^2 + 4x$ والمحور السيني بين $x = 0$ و $x = 3$.

أولاً تجد أن المنحنيين يتقاطعان عند $x = 0, 1$ وفي الفترة $0 < x < 3$ تكون المساحة المحصورة هي مجموعة المساحتين (كما موضحة بالرسم) هي:



ومن خصائص التكامل المحدود نجد أن $\int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx$

وعليه فإن

$$\int_0^1 (x^3-5x^2+4x)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}-\frac{5x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{4}-\frac{5}{3}+2\right)-(0) = \frac{7}{12}$$

و

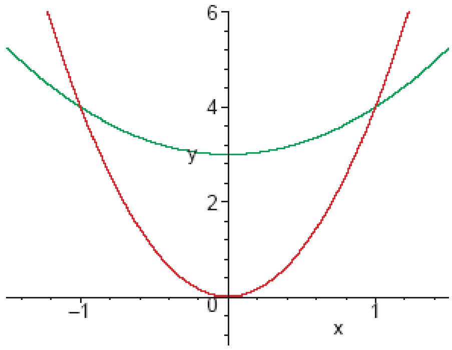
$$\begin{aligned}\int_1^3 (x^3-5x^2+4x)\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^4}{4}-\frac{5x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}\right]_1^3 \\ &= \left(\frac{81}{4}-\frac{135}{3}+18\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{3}+2\right) = -\frac{22}{3}\end{aligned}$$

وتصبح المساحة الكلية $\frac{95}{12}=\frac{22}{3}+\frac{7}{12}$ (حيث كتبت المساحة بالقيمة (المطلقة) الموجبة).

مثال:

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين $y=x^2+3$ و $y=4x^2$.

أولاً تجد أن المنحنيين يتقاطعان عند $x=1,-1$ وعليه تكون المساحة المحصورة (كما موضحة بالرسم) هي:



$$A=\int_{-1}^{1}\left[(x^2+3)-4x^2\right]dx=(\frac{x^3}{3}+3x-4\frac{x^3}{3})\,|_{-1}^{1}=(\frac{1^3}{3}+3-4\frac{1}{3})-(\frac{(-1)^3}{3}-3-4\frac{(-1)^3}{3})=4$$

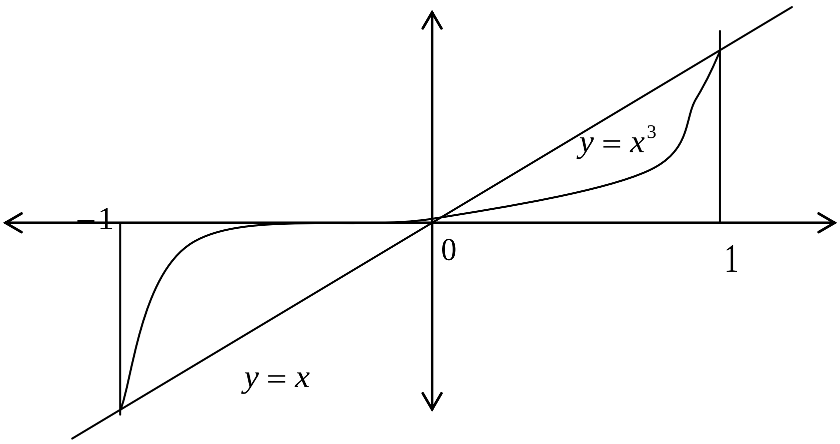
تدريب(6)

(1) أوجد المساحة المحصورة بين المحور الصادي والمنحني $x=y^2$ بين $y=-1$ و $y=1$.

مثال:

أوجد المساحة المحصورة بين المنحني $y=x^3$ والمستقيم $y=x$.

أولاً تجد أن المستقيم يتقاطع مع المنحني عند $x=0,1,-1$ وعليه تكون المساحة المحصورة (كما موضحة بالرسم) هي



$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx=\int_{-1}^0(x-x^3)dx+\int_0^1(x^3-x)dx$$

$$A=\left|\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)|_{-1}^0\right|+\left|\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)|_0^1\right|$$

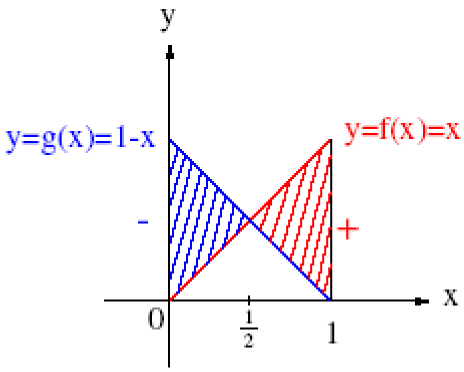
$$A=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

مثال:

أوجد المساحة المحصورة بين المستقيمين $y=x$ و $y=1-x$ بين $x=0$ و $x=1$.

أولاً تجد أن المستقيمين يتقاطعان عند $x=\frac{1}{2}$، وعليه تكون المساحة المحصورة (كما موضحة بالرسم أدناه) هي

$$\int_a^b[g(x)-f(x)]dx$$



وبالتعويض مباشرة ستحصل علي القيمة

$$\int_0^1[x-(1-x)]=\int_0^1(2x-1)dx=[x^2-x]_0^1=1-1-0+0=0$$

ولكن في الحقيقة تجد أن المساحة الفعلية المحصورة هي

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}}[g(x)-f(x)]dx &+ \int_{\frac{1}{2}}^1[f(x)-g(x)]dx\\ &= [x-x^2]_0^{\frac{1}{2}}+[x^2-x]_{\frac{1}{2}}^1\\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}-0+0+1-1-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

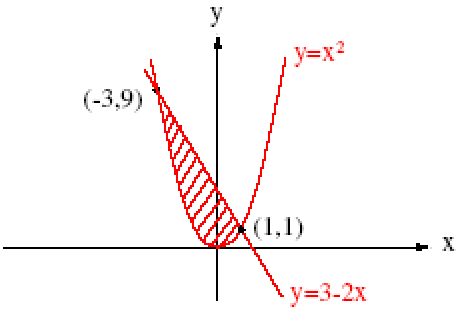
حيث $g(x)=1-x$ و $f(x)=x$.

مثال:

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى $y = x^2$ والمستقيم $y = 3 - 2x$.

أولاً تجد أن المستقيم يتقاطع مع المنحنى عند $x = 1, -3$ وعليه تكون المساحة المحصورة (كما موضحة بالرسم أدناه) هي

$$\int_a^b [g(x) - f(x)]dx$$



حيث $g(x) = 3 - 2x$ و $f(x) = x^2$ وتُعطي بـ

$$\int_{-3}^{1} ((3 - 2x) - x^2)dx$$

$$\int_{-3}^{1} ((3 - 2x)) - x^2)\, dx = (3x - 2\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3})|_{-3}^{1} = \frac{32}{3}$$

تدريب(7)

(1) أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى $y = x^2$ والمستقيم $y = x$.

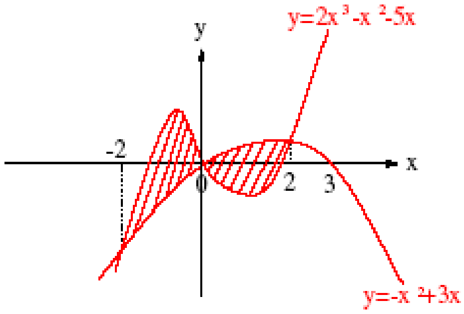
(2) أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى $y = x^2 - 4$ والمحور السيني بين $x = 0$ و $x = 3$.

مثال:

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين $y = -x^2 + 3x$ و $y = 2x^3 - x^2 - 5x$.

أولاً تجد أن المنحنيين يتقاطعان عند $x = 0, 2, -2$ وعليه تكون المساحة المحصورة (كما موضحة بالرسم أدناه) هي:

$$\int_a^b [g(x) - f(x)]dx$$



ومن الرسم أعلاه تلاحظ أن المساحة بين المنحنيين هي

$$\int_{-2}^{0}[g(x)-f(x)]+\int_{0}^{2}[f(x)-g(x)]$$

حيث $g(x)=2x^3-x^2-5x$ و $f(x)=-x^2+3x$

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{0}[(2x^3-x^2-5x) &- (-x^2+3x)]dx+\int_0^2[(-x^2+3x)- \\
&(2x^3-x^2-5x)]dx \\
&= \int_{-2}^{0}(2x^3-8x)dx+\int_0^2(8x-2x^3)dx \\
&= \left[\frac{x^4}{2}-4x^2\right]_{-2}^{0}+\left[4x^2-\frac{x^4}{2}\right]_0^2 \\
&= 0-0-\frac{16}{2}+4.4+4.4-\frac{16}{2}-0+0 \\
&= 16
\end{aligned}$$

مثال:

أوجد المساحة المحصورة بين المنحني $x=-y^2+4y$ والمستقيم $x=y-4$.

أولاً تجد أن المنحني والخط المستقيم يتقاطعان عند $y=4\,,-1$ وعليه تكون المساحة المحصورة هي (بوضع: $f(y)=y-4$ و $g(y)=-y^2+4y$)

$$\int_{-1}^{4}[f(y)-g(y)]dy=\int_{-1}^{4}(y-4)\,dy-\int_{-1}^{4}(-y^2+4y)\,dy=\int_{-1}^{4}(y^2-3y-4)\,dy=-\frac{225}{6}$$

تدريب(8)

(1) أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين $y=1-x^2$ و $y=1-\sqrt{x}$.

(2) أوجد المساحة المحصورة بين المنحني $y^2-6y-x=0$ والمستقيم $x-2y+7=0$.

أسئلة تقويم ذاتي(2)

(1) أوجد التكاملات التالية

(أ) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+25}$ (ب) $\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-5x^2}dx$

(ج) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x-5)^{\frac{4}{3}}}$ (د) $\int_{-\infty}^{0}e^{5x}dx$

(2) أوجد المساحة المحصورة بين المنحني $y=x^2+1$ والمستقيم $y=2$.

(3) أوجد المساحة المحصورة بين المنحني $y=x^2$ والمنحني $x=y^2$.

(4) أوجد المساحة المحصورة بين المنحني $x=y^2$ والمستقيم $x-2y=3$.

(5) أوجد المساحة المحصورة بين المحور السيني والمنحني $y=x^3$ بين $x=-1$ و $x=1$.

الخلاصة

بعد دراستك لهذه الوحدة لابد أن تكون قد حققت الأهداف من دراستك للوحدة، إذا كانت الإجابة بنعم فلك التهنئة، وإذا كانت بلا فيجب عليك الرجوع لها مرة ثانية، وسوف نساعدك بوضع خلاصة لاهم ما تم شرحه.

شرحنا لك اصل التكامل: وعرفناه ب $\int f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [\ F(x)\ ]$

ووجدنا أن هذا التكامل يوضح المساحة المحصورة بين المنحنى ونقطتين (b) (a) ثم عرفنا خصائص التكامل وهى.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

إذا كانت $f(x)$ دالة فردية فإن $\int_a^b f(x)dx = 0$

إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية فإن $\int_a^b f(x)dx = 2\int_a^b f(x)dx$

بعد ذلك تعرفت على تطبيقات التكامل المحدود في الفيزياء،وجدنا أن الشغل المبذول W لتحريك جسم من النقطة a إلى b تحت تأثير قوة F يعطى بالمعادلة

$$W = \int F(x)dx$$

وشرحنا تطبيق التكامل في إيجاد المساحة التى تنحصر بين منحنيين، أو منحنى ومستقيم،أو محور فإذا كانت f (x) و g (x) دالتان مستمرتان في الفترة $a \le x \le b$ فان المساحة المحصورة (A) تكون

$$A = \int [f(x) - g(x)]$$

وإذا كان المنحنى $f(x)$ مع المحور السيني فان المساحة تكون

$$A = \int f(x)dx$$

لان معادلة المحور السيني $g(x) = Y = 0$

والمساحة المحصورة بين المنحنى $f(y)$ والمحور الصادي تكون معادلة المساحة

$$A = \int f(y)dy$$

لان معادلة المحور الصادي= $g(y) = x = 0$

ثم شرحنا لك كيفية إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى ومحور، ولابد أن نعرف نقاط تقاطع المنحنى مع المحور، إذا كانت المساحة اسفل المنحنى،أو أعلى المنحنى، فإذا كانت اسفل المنحنى تكون الإشارة سالبة

لمحة مسبقة عن الوحدة التالية

الوحدة التى تلي هذه الوحدة، سوف تشرح لك تطبيقات التكامل، في إيجاد أطوال ومساحات وحجم الأشكال الهندسية المختلفة، مثل طول القوس وتشرح المعادلات الوسيطية، ومساحة السطح الدوراني والحجوم الدورانية.

إجابات التدريبات

تدريب(1)

1−

$$w=\int_0^3\left(\sin\pi x+\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)\right)dx$$
$$=-\frac{1}{\pi}\cos\pi x+\frac{3}{\pi}\sin\frac{\pi}{3}x\int_0^3$$
$$=\left(-\frac{1}{\pi}\cos3\pi+\frac{3}{\pi}\sin\pi\right)-\left(-\frac{1}{\pi}\cos0+\frac{3}{\pi}\sin0\right)$$
$$=\left(-\frac{1}{\pi}(-1)+0\right)-\left(-\frac{1}{\pi}(1)+0\right)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}=\frac{2}{\pi}$$

2− $$\int_0^\pi\sin xdx=-\cos x\,\underset{0}{\overset{\pi}{1}}=-(-1-1)==2$$

تدريب(2)

1−

$$x=\int_1^3\left(2+4t+3t^2\right)dt=2t+2t^2+t^3\int_1^3$$
$$=\left(6+18+27\right)-\left(2+2+1\right)=51-5=46m$$

2− نجزئ الفترة بحيث

$$\Delta x=\frac{3-2}{n}=\frac{1}{n}$$

$$f(x_i)=\left(2+\frac{i}{n}\right)^2 \quad \therefore\ x_i=2+\frac{i}{n}$$

$$f(x_i)=4+4\frac{i}{n}+\frac{i^2}{n^2}$$

$$\therefore \int_2^3 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\left(4+\frac{4i}{n}+\frac{i^2}{n^2}\right)\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\left(4n+\frac{2n(n+1)}{n}+\frac{n(n+1)(2n+2)}{6n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(4+2+\frac{2}{n}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6n}+\frac{1}{6n^2}\right)$$

$$=4+2+0+\frac{1}{3}+0+0=6\frac{1}{3}$$

$$\int_2^3 x^2dx=\frac{x^3}{3}\int_2^3=\frac{27}{3}-\frac{8}{3}=\frac{19}{3}=6\frac{1}{3}$$

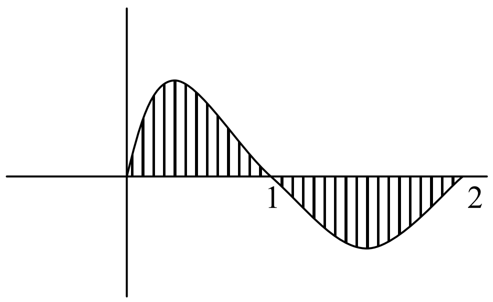
نفس النتيجة

3−

$$\int_0^1\left(x^2-x\right)dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\,{}^{\pi}_{0}1=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-0-0\right)$$

$$=\frac{2-3}{6}=-\frac{1}{6}$$

تدريب(3)



1. من الرسم أعلاه يتضح أن المساحة هي:

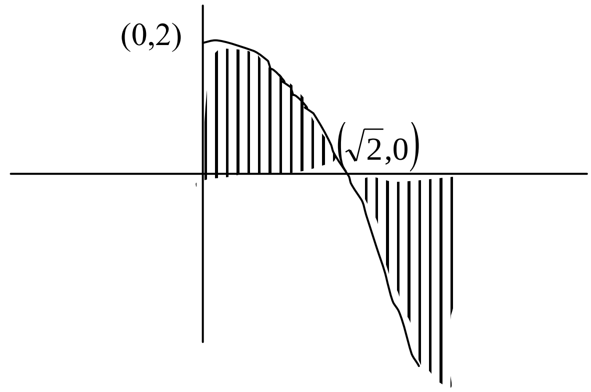
$$\int_0^2 (x^3-3x^2+2x)dx = \int_0^1 (x^3-3x^2+2x)dx - \int_1^2 (x^3-3x^2+2x)dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right)\Big|_0^1 \left(\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right)\Big|_0^1$$

$$= \left(\left(\frac{1}{4}-1+1\right)-0\right)-\left((4-8+4)-\left(\frac{1}{4}-1+1\right)\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

.2 $$\int_1^5 (3x+5)dx = \frac{3x^2}{2}+5x\Big|_1^5 \left(\frac{75}{2}+25\right)-\left(\frac{3}{2}+5\right)=\frac{125-13}{2}=\frac{112}{2}=56$$

تدريب(4)



1. وتكون المساحة هي:

$$\int_0^2 (2-x^2)dx = \int_0^{\sqrt{2}} (2-x^2)dx - \int_{\sqrt{2}}^2 (2-x^2)dx$$

$$= 2x-\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{2}} \left(2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{\sqrt{2}}^2$$

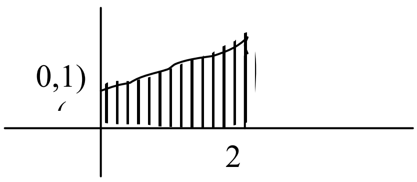
$$= \left(\left(2\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)-0\right)-\left(\left(4-\frac{8}{3}\right)-\left(2\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{3}\right)-\left(\frac{12-8-6\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{4+8\sqrt{2}}{3}=\frac{8\sqrt{2}-4}{3}$$

.2

$$\int_0^3 \frac{5e^{2x}}{7+9e^{2x}}dx = \frac{5}{18}\int_0^3 \frac{18e^{2x}}{7+9e^{2x}}dx$$
$$= \frac{5}{18}\ln\left(7+9e^{2x}\right)\Big|_0^3 = \frac{5}{18}\left[\ln\left(7+e^6\right)-\ln\left(7+9\right)\right]$$
$$= \frac{5}{18}\ln\left(\frac{\left(7+e^6\right)}{16}\right)$$

تدريب(5)

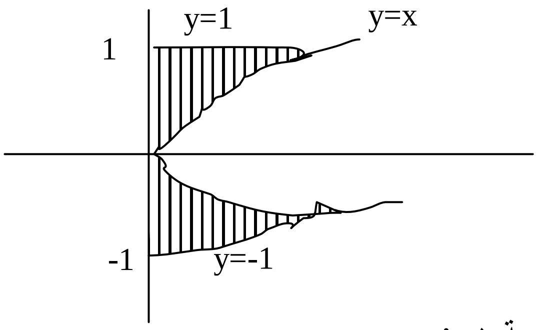


بما أن $y = e^x > 0$

إذن المساحة هي:

$$\int_0^2 e^x dx = e^x \Big|_0^2 = e^2 - e^0 = e^2 - 1$$

تدريب(6)

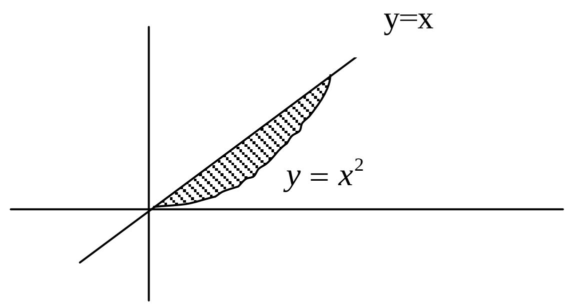


1. من الرسم المساحة هي:

$$\int_{-1}^{1} y^2 dy = \frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

تدريب(7)

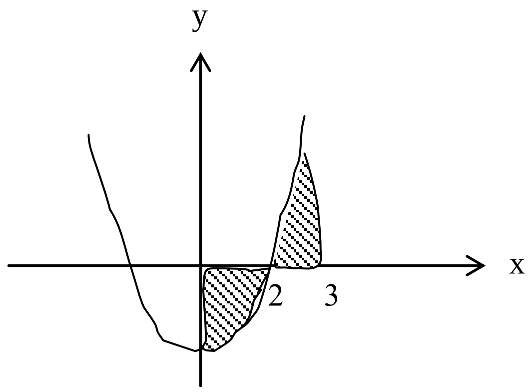
.1



بحل المعادلة $x^2 = x$ نجد أن نقاط التقاطع هي عند x=0، x=1 تكون المساحة هي:

$$\int_0^1 \left(x - x^2\right)dx = x^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-(0-0)=\frac{1}{6}$$

.2



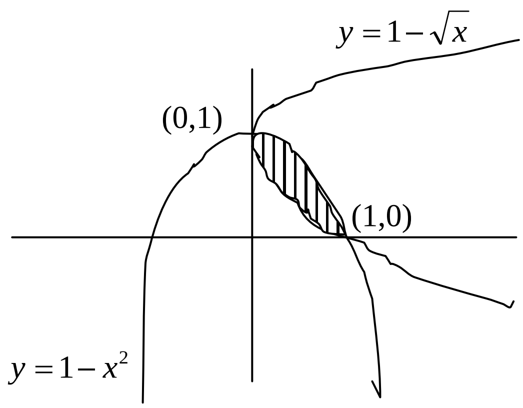
هي:

$$-\int_0^2 \left(x^2-4\right)dx + \int_2^3 \left(x^2-4\right)dx$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3}+4x\Big|_0^2\right)+\frac{x^3}{3}-4x\ \Big|_2^3\left(\frac{-8}{3}+8\right)+\left[(9-12)-\left(\frac{8}{3}-8\right)\right]=7\frac{2}{3}$$

تدريب(8)

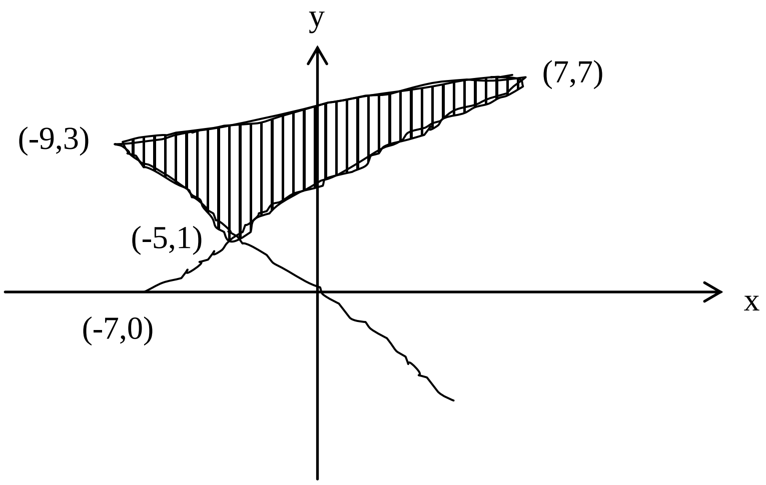
.1



بحل المعادلة $1-\sqrt{x} = 1-x^2$ نجد أن نقاط التقاطع تكون عند x=0، x=1 وتكون المساحة هي:

$$\int_0^1 \left(1-x^2-1+\sqrt{x}\right)dx = x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)-0=\frac{1}{3}$$

.2



وتكون المساحة هي:

$$A=\int_1^7 \left((2y-7)-\left(y^2-6y\right)\right)dy=\int_1^7\left(-y^2+8y-7\right)dy=-\frac{y^3}{3}+4y^2-7y\Big|_1^7$$

$$=\left(\frac{-343}{3}+196-49\right)-\left(-\frac{1}{3}+4-7\right)=36$$

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

تقويم ذاتي(1)

1. $= 290$
2. $= \frac{1}{6}\left[\left(\sqrt{17}\right)^3 - \left(\sqrt{13}\right)^3\right] = \frac{1}{6}17\sqrt{17} - 13\sqrt{13}$
3. $= \ln\frac{9}{2}$
4. $= \infty$
5. $= \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\pi}{8}$

تقويم ذاتي(2)

(1)

أ) $= \frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{5}$

ب) $= 0$

ج) $= 0$

د) $= \frac{1}{5}$

(2) $= \frac{2}{3}$

(3) $= \frac{1}{3}$

(4) $= \frac{32}{3}$

(5) $= \frac{1}{2}$

مسرد المصطلحات

التكامل المحدود The Definite Integral

هو تكامل $\left[F(x)\right]\Big|_a^b$ $= F(a) - F(b) = \int_a^b (x)dx$ وتمثل قيمة التكامل من الناحية الهندسية المساحة التى يحصرها المنحنى بين النقطتين x=a و x=b

الدالة المستمرة Continuous Function

هي الدالة التى تكون f(a) قيمة منتهية وتكون النهاية اليمنى =النهاية اليسرى للدالة عند x=a وان تساوى كل من النهايتين f (a)

المراجع

1. Ayres, Frank and Mendel son, Elliott**,** Schaum, (1999) **Outline of Calculus,** McGraw-Hill

2. G.B, Thomas and R, Finney, (1996) **Calculus and Analytical Geometr**y, Addison- Wesley Publishing Co.

3..R, Ellis and D, Gulick, (1994) **Calculus with Analytic Geometry**, 5th Edition, SCP

4. H,.Anton, I, Bivens, and S, Davis, (2002) **Calculus (Early** transcendental), 7th Edition